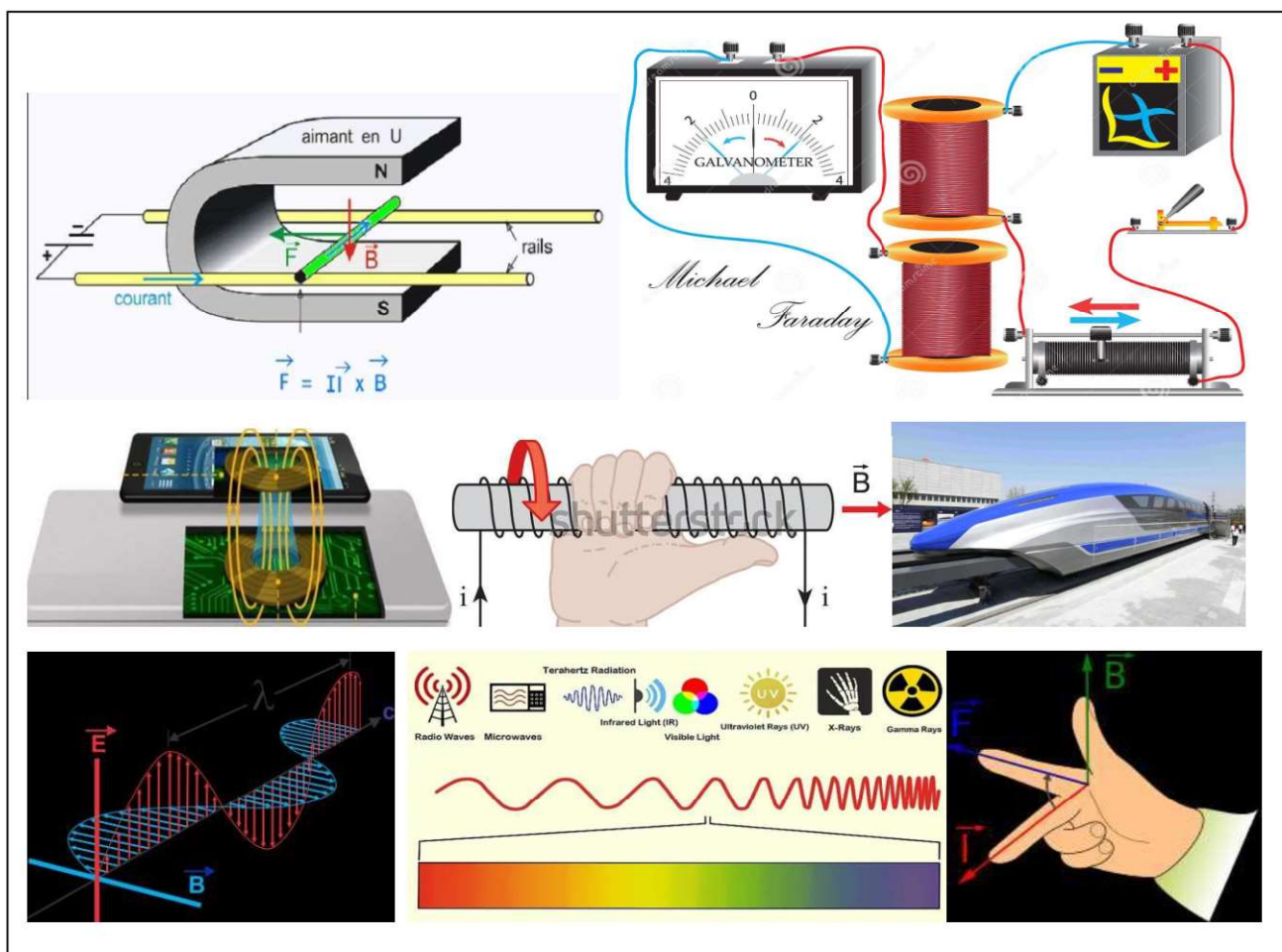


Département de Physique

Filière SMI - S4

Cours de l'Electromagnétisme dans le vide



Mohammed
EL GHZAUI

Chapitre 1 : Champ magnétique

Introduction

De la relativité générale à la physique quantique, en passant par les moteurs électriques, la physique moderne travaille sur des champs. Ils sont omniprésents. Ce chapitre en introduit un, le champ magnétique, qui permet de comprendre certains principes de fonctionnement des appareils de haute technologie actuelle.

Dans tout ce chapitre, nous allons nous intéresser au cas de champs magnétiques créés par des circuits filiformes, de géométrie simple, fixes, et parcourus par des courants permanents (charges électriques en mouvement mais l'intensité du courant électrique ne dépend pas du temps) ; les champs ainsi créés ne dépendent pas du temps et on qualifie généralement ce domaine de la physique de magnétostatique (par analogie avec l'électrostatique qui s'intéresse aux champs électriques, dits électrostatiques, créés par des charges ponctuelles supposées immobiles) ; cependant, par simplification de langage, on n'emploie que très peu le terme de champ magnétostatique au profit de celui de champ magnétique, ce que nous ferons également ici.

Bref aperçu historique

Les aimants sont connus depuis l'Antiquité, sous le nom de magnétite, pierre trouvée à proximité de la ville de Magnesia (Turquie). C'est de cette pierre que provient le nom actuel de champ magnétique. Les chinois furent les premiers à utiliser les propriétés des aimants, il y a plus de 1000 ans, pour faire des boussoles. Elles étaient constituées d'une aiguille de magnétite posée sur de la paille flottant sur de l'eau contenue dans un récipient gradué. Au XVIII^{ème} siècle, Franklin découvre la nature électrique de la foudre (1752). Or, il y avait déjà à cette époque de nombreux témoignages de marins attirant l'attention sur des faits étranges : Les orages perturbent les boussoles ; La foudre frappant un navire aimante tous les objets métalliques. Franklin en déduisit « la possibilité d'une communauté de nature entre les phénomènes électriques et magnétiques ». d'ailleurs, Coulomb (1785) montre la décroissance en $1/r^2$ des deux forces. Mais il faut attendre la fin du XIX^{ème} siècle pour qu'une théorie complète apparaisse, la théorie de l'électromagnétisme. Tout commença avec l'expérience de Oersted en 1820. Il plaça un fil conducteur au-dessus d'une boussole et y fit passer un courant. En présence d'un courant l'aiguille de la boussole est effectivement déviée, prouvant sans ambiguïté un lien entre le courant électrique et le champ magnétique. Par ailleurs, il observa :

- Si on inverse le sens du courant, la déviation change de sens.
- La force qui dévie l'aiguille est non radiale

L'étude quantitative des interactions entre aimants et courants fut faite par les physiciens Biot et Savart (1820). Ils mesurèrent la durée des oscillations d'une aiguille aimantée en fonction de sa distance à un courant rectiligne. Ils trouvèrent que la force agissant sur un pôle est dirigée perpendiculairement à la direction reliant ce pôle au conducteur et qu'elle varie en raison inverse de la distance. De ces expériences, Laplace déduisit ce qu'on appelle aujourd'hui la loi de Biot et Savart. Une question qui s'est ensuite immédiatement posée fut : si un courant dévie un aimant, alors est-ce qu'un aimant peut faire dévier un courant ? Ceci fut effectivement prouvé par Davy en 1821 dans une expérience où il montra qu'un arc électrique était dévié dans l'entrefer d'un gros

aimant. L'élaboration de la théorie électromagnétique mit en jeu un grand nombre de physiciens de renom : Oersted, Ampère, Arago, Faraday, Foucault, Henry, Lenz, Maxwell, Weber, Helmholtz, Hertz, Lorentz et bien d'autres. Si elle débuta en 1820 avec Oersted, elle ne fut mise en équations par Maxwell qu'en 1873 et ne trouva d'explication satisfaisante qu'en 1905, dans le cadre de la théorie de la relativité d'Einstein.

1. Courant électrique

Les sources du champ électrique sont des charges électriques fixes. On s'intéresse maintenant aux sources du champ magnétique : les charges électriques en mouvement qui donnent lieu à des courants électriques.

1.1. Divers types de courants électriques

On appelle courant électrique tout mouvement d'ensemble des particules chargées dans un référentiel. On peut distinguer plusieurs types de courants électriques suivant leur origine.

a) Courant de conduction

Il s'agit du déplacement d'ensemble de particules chargées dans un milieu conducteur lié à l'existence d'un champ électrique \vec{E} .

Chaque particule de charge q , en plus de son mouvement d'agitation thermique, est soumise à une force :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Toutes les charges de même type vont donc subir la même force et avoir un mouvement identique : on aura un mouvement d'ensemble donnant lieu à un courant électrique. L'origine électrique du courant permet de qualifier ce courant de courant de conduction.

b) Courant de convection

Les charges électriques sont parfois liées à des corps électriquement neutres et en mouvement. Le déplacement de ces corps entraîne celui des charges qui lui sont liées et l'existence d'un courant électrique liée à cet entraînement. On parle de courant de convection. Dans ce type de courant, on classe aussi le mouvement des particules chargées qui se déplacent sous l'action d'un autre type de champ que le champ électrique (le champ de pesanteur par exemple). Les courants de convection correspondent à l'entraînement des particules chargées sous une action autre qu'électromagnétique.

c) Courant de diffusion

Les courants de diffusion sont liés aux déplacements pouvant se produire du fait d'un gradient de concentration des particules chargées. Le mouvement tend à réduire cette différence.

1.2 distribution de courant

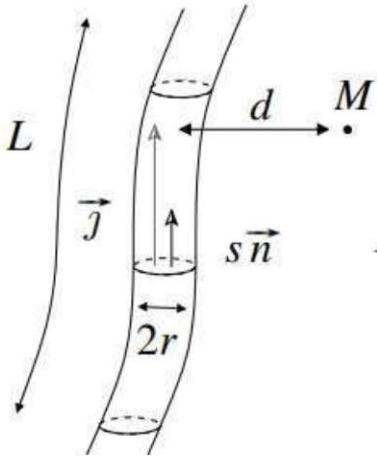
La densité de courant qui vient d'être introduite est une densité volumique de courant au même titre qu'a été introduite en électrostatique une densité volumique de charges. On rappelle que la densité volumique de courant s'écrit :

$$\vec{j} = \mu_m \vec{v}$$

où μ_m est la densité volumique de charges mobiles et \vec{v} la vitesse moyenne de ces charges mobiles. Le module de ce vecteur représente la charge qui traverse par unité de temps, l'unité de surface perpendiculaire à la direction de déplacement des charges mobiles ; il s'exprime en $A m^{-2}$.

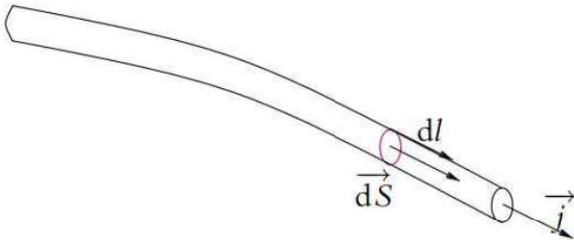
Le courant I traversant une surface (S) quelconque est le flux de \vec{j} à travers cette surface :

$$I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS}$$



Le moyen le plus simple de transporter le courant électrique est de le faire passer dans des fils électriques métalliques. Un fil électrique est assimilé à un cylindre de section S de longueur L susceptible de se courber pour avoir la forme voulue. En considérant que dans le fil la densité de courant électrique \vec{j} est uniforme à travers une section droite du fil, alors on peut définir le courant I , relié à \vec{j} par :

$$I = \vec{j} \cdot S \vec{n}$$



Dans le cas d'un tube de courant, ces vecteurs \vec{j} , $d\vec{l}$ et $d\vec{S}$ sont colinéaires donc on peut intervertir leurs positions relatives dans l'expression précédente. Le volume élémentaire peut s'exprimer par :

$$d\tau = d\vec{l} \cdot \vec{S}$$

On en déduit l'expression du courant élémentaire :

$$\vec{j} d\tau = \vec{j} \cdot d\vec{l} \vec{S} = I d\vec{l}$$

Ceci correspond à une modélisation linéique qui sera très souvent utilisée. Ce sera la seule modélisation considérée dans la suite de ce chapitre de magnétostatique.

1.3 Ordres de grandeur

Dans les unités du système international, la force s'exprime en newton (N), la charge en coulombs (C) et la vitesse en mètre par seconde ($m.s^{-1}$). L'unité du champ magnétique est donc parfaitement déterminée à partir de sa définition ; on l'appelle tesla, de symbole T . Dans certains cas, on utilise une autre unité : le gauss de symbole G tel que

$$1G = 10^{-4}T$$

Quelques valeurs usuelles de champ magnétique :

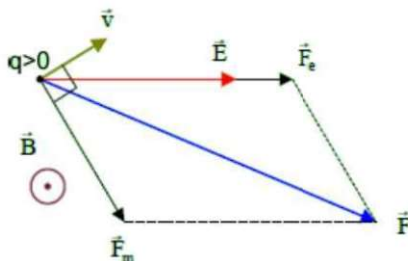
Dispositif	B (T)
Champ magnétique terrestre, en surface	$0,47.10^{-5}$
Champ créé à 1 cm d'un fil rectiligne parcouru par 10 A	2.10^{-5}
Champ créé à 1 mm d'un aimant permanent	0,1 à 1
Électroaimant	10 à 100
Étoile à neutrons, en surface	10^{11}

2. Force de Lorentz

2.1. définition

La force totale, électrique et magnétique (on dit électromagnétique) subie par une particule de charge q et de vitesse \vec{v} mesurée dans un référentiel galiléen est

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$



Cette définition est universelle, elle s'applique aussi bien pour les champs stationnaires que pour les champs dépendant du temps et quelle que soit la vitesse \vec{v} . Dans l'approximation non relativiste la force de Lorentz comme toute autre force, ne dépend pas du référentiel d'inertie choisi. Par contre sa décomposition en composante électrique et composante magnétique n'a de signification que si le référentiel d'inertie utilisé est explicitement défini. L'expression de la force de Lorentz peut être considérée comme la définition du champ électrique \vec{E} et du champ magnétique \vec{B} . Le champ magnétique \vec{B} , contrairement au champ électrique \vec{E} , n'exerce aucune force sur une charge immobile. Dans le cas où une charge q au repos est entourée de charges ponctuelles au repos aussi, la charge q subit une force électrique \vec{F}_e :

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

Avec \vec{E} le champ électrique créé par les autres charges autre que q en M. Dans le cas où les différentes charges sont en mouvement on constate l'apparition d'une force différente de \vec{F}_e et qui

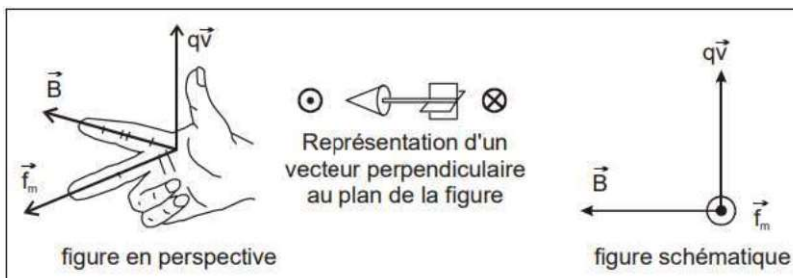
dépend de la vitesse de la charge q du champ magnétique créé par toutes les charges en mouvement autre que q . L'expression de cette force est :

$$\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Cette force appelé la force magnétique ou partie magnétique de la force de Lorentz. La présence du champ magnétique \vec{B} dans l'expression de cette force constitue la définition du champ magnétique au point M. Le champ magnétique est défini à partir de son action sur une particule chargée, de charge q , se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un référentiel.

Remarques

- Si la vitesse \vec{v} a la même direction que le champ magnétique, la particule ne subit pas de force.
- Dans les autres cas de figures, la force subie par la particule est perpendiculaire à la fois à \vec{v} et à \vec{B} .
- L'intensité de la force est proportionnelle à la charge q , à la norme v de sa vitesse et à l'intensité B du champ magnétique et au sinus de l'angle entre \vec{v} et \vec{B} .
- Norme : $F_{mag} = |q\vec{v}B\sin\alpha|$ où q est la charge (C), v est la vitesse de la charge (m/s), B est l'intensité (la norme) du vecteur champ magnétique (T), α est l'angle formé par \vec{v} et \vec{B} .
- Sens : déterminé par la règle des trois doigts de la main droite :
 - Pouce : sens de $q\vec{v}$ (= sens de \vec{v} si $q>0$; = sens opposé à \vec{v} si $q<0$)
 - Index : sens de \vec{B}
 - Majeur : sens de \vec{F}_{mag}



2.2. Travail de la force de Lorentz

Pendant un intervalle de temps élémentaire dt la particule parcourt $\vec{dl} = \vec{v}dt$. Le travail infinitésimal d'une force \vec{F} pendant un déplacement élémentaire \vec{dl} s'écrit :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

Donc,

$$\delta W = q\vec{E} \cdot \vec{dl} + q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

D'où

$$\delta W = \vec{F}_e \cdot \vec{dl} + \vec{F}_{mag} \cdot \vec{dl}$$

Or, La partie magnétique de la force de Lorentz étant par définition, à tout instant t , perpendiculaire à la vitesse \vec{v} de la particule (propriété du produit vectoriel), elle est aussi

perpendiculaire, à tout instant t , au vecteur déplacement élémentaire $\vec{dl} = \vec{v}dt$, ce qui entraîne $\vec{F}_{mag} \cdot \vec{dl} = 0$ quel que soit le déplacement élémentaire. D'où :

$$\delta W = \vec{F}_e \cdot \vec{dl}$$

La force de Lorentz ne travaille pas et ne peut donc pas être utilisée seule pour accélérer une particule chargée (pas de variation d'énergie cinétique); seule la force électrique travaille

2.3. Puissance de la force Lorentz

La puissance de la force magnétique est nulle, en effet :

$$P_{mag} = \vec{F}_{mag} \cdot \vec{v} = 0$$

L'effet de la force magnétique sur une charge en mouvement est de dévier sa trajectoire, elle ne fait pas varier la valeur du module de la vitesse.

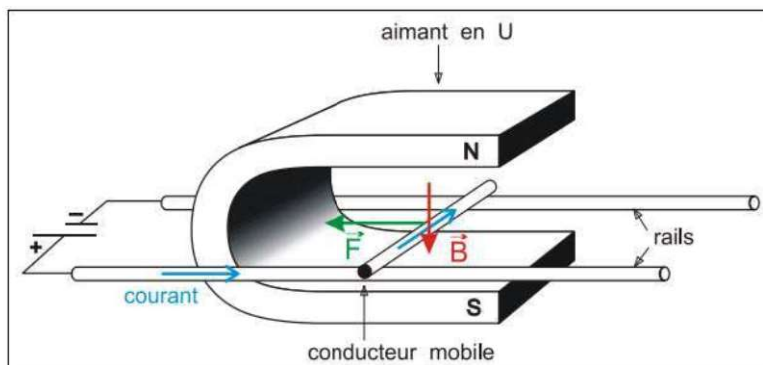
D'où, La puissance de la force de Lorentz est

$$P_{mag} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

3. Force de Laplace

3.1. Expérience : force électromagnétique de Laplace s'exerçant sur un conducteur parcouru par le courant et placé dans un champ magnétique

a) Dispositif expérimental Un conducteur mobile est placé sur deux rails horizontaux connectés à un accumulateur, et dans le champ magnétique d'un aimant en U.



b) Observations

Lorsque le courant passe le conducteur mobile roule vers le gauche où vers la droite selon le sens du courant et selon le sens du champ magnétique.

c) Interprétation

D'après un modèle simplifié on peut considérer que le courant électrique est constitué d'innombrables électrons qui se déplacent tous avec la même vitesse \vec{v} dans le sens opposé au sens conventionnel du courant. Ces électrons se déplacent donc dans un champ magnétique $\vec{B} \perp \vec{v}$ de sorte que chaque électron est soumis à une même force de Lorentz. Comme les électrons sont retenus par les atomes du réseau cristallin constituant le conducteur, c'est finalement le conducteur tout entier qui est sollicité par une force appelée force électromagnétique de Laplace. Cette force est égale à la résultante de toutes les innombrables forces de Lorentz qui s'exercent sur les électrons qui constituent le courant électrique.

3.2. Expression mathématique de la force de Laplace

Nous avons vu au paragraphe (2) qu'une particule chargée, de charge q , se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un référentiel où règne un champ magnétique \vec{B} , est soumise à la force magnétique de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Un élément de circuit de longueur $d\ell$ parcouru par un courant d'intensité I et placé dans un champ magnétique \vec{B} , contient des charges mobiles de densité volumique μ_m . Un volume élémentaire $d\tau$ autour d'un point M du conducteur contient une charge : $dq = \mu_m d\tau$ avec $d\tau = \vec{S} \cdot \vec{d\ell}$ où S est la section du conducteur et $d\ell$ un élément de longueur de ce conducteur.

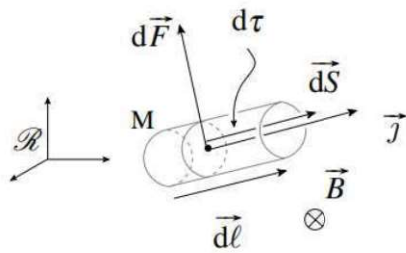


Figure. Force de Laplace sur un élément $d\ell$ de fil.

Chacune de ces charges élémentaires dq subit une force :

$$\vec{dF} = dq\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Avec $dq = \mu_m d\tau$

$$\vec{dF} = \mu_m d\tau \vec{v} \wedge \vec{B}$$

On a aussi $d\tau = \vec{S} \cdot \vec{d\ell}$

$$\vec{dF} = \vec{S} \cdot \vec{d\ell} \mu_m \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Nous avons vu au paragraphe (1.2) que $\vec{j} = \mu_m \vec{v}$

$$\vec{dF} = \vec{S} \cdot \vec{d\ell} \cdot \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Finalement,

$$\vec{dF} = I \vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$

où $\vec{d\ell}$ est parallèle à l'élément de circuit et dans le sens du courant.

D'où, La force subie par un élément de circuit de longueur $\vec{d\ell}$ parcouru par un courant permanent d'intensité I et placé dans un champ magnétique \vec{B} , appelée force de Laplace, s'écrit :

$$\vec{dF} = I \vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$

où $\vec{d\ell}$ est parallèle à l'élément de circuit et dans le sens du courant comme montre la figure suivante.

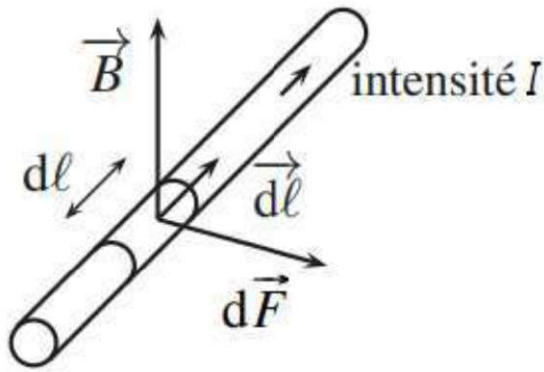


Figure. Force élémentaire de Laplace

3.3. Force de Laplace sur un tronçon rectiligne dans un champ uniforme

On considère un tronçon de conducteur rectiligne MN parcouru par un courant d'intensité I , comptée positivement de M vers N , et plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme \vec{B} (figure). Quelle est la force de Laplace subie par le tronçon MN de la part du champ \vec{B} ?

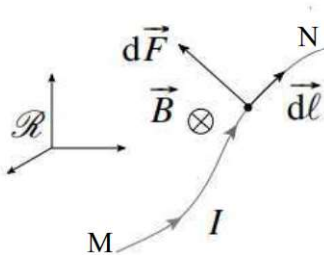


Figure. Force de Laplace sur un élément $d\ell$ de conducteur filiforme parcouru par un courant.

La force de Laplace se calcule en additionnant les forces élémentaires sur tous les éléments de longueur d entre M et N :

$$\vec{F} = \int_M^N I \vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$

Le champ \vec{B} est uniforme :

$$\vec{F} = \left(\int_M^N I \vec{d\ell} \right) \wedge \vec{B}$$

De plus

$$\int_M^N \vec{d\ell} = \overrightarrow{MN}$$

Donc, un tronçon de conducteur rectiligne MN placé dans un champ magnétique extérieur uniforme \vec{B} et parcouru par un courant d'intensité I , comptée positivement de M vers N , subit la force de Laplace suivante :

$$\vec{F} = I \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}$$

Exemple : On étudie une spire rectangulaire $MNPQ$ parcourue par un courant i , compté positif dans le sens $M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow Q$, et plongée dans un champ magnétique extérieur uniforme \vec{B} . La somme des forces de Laplace sur les quatre côtés du cadre est nulle, en effet :

$$\vec{F} = I\overline{MN} \wedge \vec{B} + I\overline{NP} \wedge \vec{B} + I\overline{PQ} \wedge \vec{B} + I\overline{QM} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F} = I(\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PQ} + \overline{QM}) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

3.4. Interaction entre deux fils conducteurs infinis et parallèles

Soit \vec{B}_1 un champ magnétique le fil 1 :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

r la distance du point M au fil rectiligne

Une longueur l du fil 2 parallèle au fil 1 subit donc une force magnétique :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 \vec{l} \wedge \vec{B}_1$$

C'est-à-dire :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 l \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} \vec{u}_r$$

D'où, la force $F_{1 \rightarrow 2}$ qui s'exerce entre deux conducteurs rectilignes, parallèles, de même longueur l , séparés d'une distance d et parcourus respectivement par des courants électriques d'intensité I_1 et I_2 peut s'écrire :

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}$$

Selon les sens respectifs des courants, les conducteurs s'attirent ou se repoussent (voir la figure).

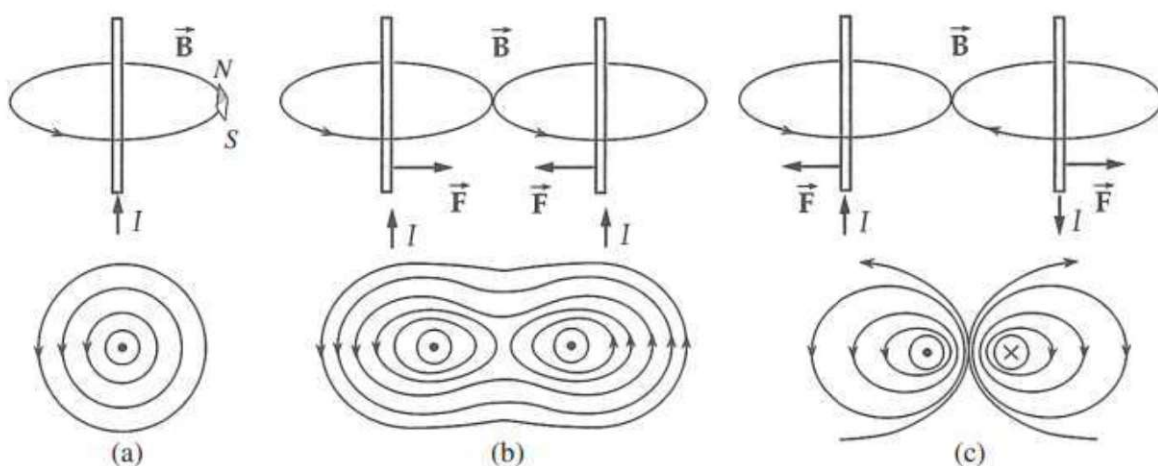


Figure. Forces et lignes de champs magnétiques pour des conducteurs rectilignes parcourus par un courant

- Si les deux courants sont de même sens (c'est à dire $I_1 I_2 > 0$), les forces sont attractives \Rightarrow les deux fils s'attirent ;
- Si les deux courants sont de sens opposés (c'est à dire $I_1 I_2 < 0$), les forces sont répulsives \Rightarrow les deux fils se repoussent
- Le module de cette force s'écrit :

$$F_1 = F_2 = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I_1 I_2 l}{d}$$

- Dans le cas où les deux fils sont parcourus par le même courant : $F_1 = F_2 = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I^2 l}{d}$

4. Expressions du champ magnétique

4.1- Champ magnétique créé par une charge en mouvement

Le champ magnétique créé en un point M par une particule de charge q située en un point P et animée d'une vitesse v dans un référentiel galiléen est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$



μ_0 est la perméabilité du vide, elle décrit la capacité du vide à laisser passer le champ magnétique. Sa valeur dans le système international est :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Henry} \cdot \text{m}^{-1} (\text{H} \cdot \text{m}^{-1})$$

Principe de superposition : s'il existe deux charges ou plus en mouvement alors le champ magnétique créé en un point M est la somme vectorielle des champs créés par chaque charge.

4.2- Champ créé par un ensemble de charges en mouvement

Soit N charges en mouvement respectivement à des vitesses \vec{v} . En raison du principe de superposition, le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par les N charges en un point M est donné par la relation :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{v}_i \wedge \overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3}$$

Si le nombre de charges est très important dans un volume τ , la somme discontinue se transforme en une intégrale sur des charges élémentaires contenues dans le volume élémentaire $d\tau$, ainsi :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dq \vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

On a aussi, $\vec{j} = \mu_m \vec{v}$; $dq = \mu_m d\tau$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(p) \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau$$

Cette relation est générale, et peut être appliquée quelle que soit la forme du conducteur.

4.3 -Cas d'un fil filiforme : loi de Biot et Savart

La loi de Biot et Savart permet d'effectuer un calcul direct du champ \vec{B} créé par une distribution de courants. Soit un circuit filiforme de section S (négligeable devant sa longueur) parcouru par un courant continu d'intensité I . Chaque élément de longueur dl centré sur un point P orienté dans le sens de I crée un champ élémentaire en M donné par :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(p)d\tau \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Avec $\vec{j}d\tau = \vec{j} \overrightarrow{dl} S = I \overrightarrow{dl}$, donc :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

C'est la formule de Biot et Savart.

Le champ créé par le fil est la somme vectorielle de tous les $d\vec{B}(M)$ est $\vec{B}(M) = \int d\vec{B}(M)$

5. PROPRIÉTÉS DU CHAMP MAGNÉTIQUE

5.1. Flux du champ magnétique

Flux conservatif : Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul :

$$\oiint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

En tenant compte du théorème de Gauss-Ostrogradski, on obtient l'équation du flux magnétique :

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Théorème d'Ostrogradski: Le flux d'un champ $\vec{\Gamma}$ à travers une surface fermée S est égal à l'intégrale de sa divergence sur le volume intérieur V délimité par cette surface.

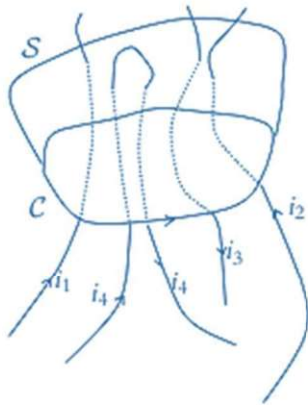
$$\oiint \vec{\Gamma} d\vec{S} = \iiint \text{div} \vec{\Gamma} \cdot dV$$

5.2. Circulation du champ magnétique (Théorème d'Ampère)

De même qu'en électrostatique, le théorème de Gauss permet de relier le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée à la somme des charges intérieures à cette surface, le théorème d'Ampère permet de relier la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé à l'intensité totale des courants électriques qui traversent une surface quelconque s'appuyant sur ce contour.

Théorème d'Ampère : La circulation du champ magnétique le long d'une courbe fermée et orientée G est égale au produit de μ_0 par l'intensité électrique totale qui traverse une surface S s'appuyant sur le contour fermé.

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$



Sur l'exemple de la figure ci-contre, $\sum_i I_i = i_1 + i_2 - i_3 + i_4 - i_4$.

Forme locale du théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère peut s'appliquer à un contour de forme quelconque, on va l'appliquer à un petit contour délimitant une surface élémentaire dans un conducteur. En utilisant le théorème de Stokes :

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \iint \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} d\vec{S}$$

On a aussi $I = \iint \vec{j} d\vec{S}$, donc :

$$\iint \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \iint \vec{j} d\vec{S}$$

D'où,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Quand appliquer le théorème d'ampère :

Lorsque la distribution de courants possède d'importantes symétries.

Il faut trouver un contour passant par M sur lequel \vec{B} est uniforme.

Reconnaître tous les éléments de symétrie.

Le contour d'Ampère doit passer par le point où on cherche à calculer l'induction magnétique

Calcul direct de la circulation : produit scalaire entre les vecteurs champ \vec{B} et déplacement $d\vec{l}$

Calcul par la méthode d'Ampère : attention au sens des courants

6. Potentiel vecteur \vec{A}

Sachant que $\text{div} \vec{B} = 0$ et que la divergence du rotationnel d'un champ vectoriel est nulle, on en déduit qu'il existe un champ vectoriel \vec{A} appelé potentiel vecteur tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

Le vecteur \vec{A} est appelé potentiel vecteur

Prenons $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x, y, z) \end{pmatrix}$ où f est une fonction de classe C^2 . Calculons son rotationnel puis vérifions qu'on obtient bien un champ de divergence nulle. On a

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et la divergence de ce champ rotationnel vaut

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$$

Or, en vertu du théorème de Schwarz, une dérivation partielle à l'ordre 2 ne dépend pas de l'ordre dans lequel se fait la dérivation.

On en déduit ici que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$.

7. Détermination du sens du champ \vec{B}

7.1. Règles de la main droite

Première règle de la main droite : Si l'on met la main droite le long de la ligne de champ magnétique, l'orientation de celle-ci allant de la base vers le bout des doigts, le pouce indique le sens du courant (figure).

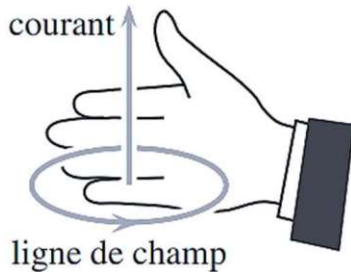


Figure – Règle de la main droite : le champ tourne autour du courant qui le crée.

Cette règle est générale. Chaque fois qu'une ligne de champ est une courbe fermée, elle entoure un fil parcouru par un courant dont le sens est donné par la règle précédente. On peut donc savoir immédiatement, à l'observation d'une carte de champ magnétique, en quel lieu il y a un courant qui passe et dans quel sens ce courant est.

Deuxième règle de la main droite : Si l'on met la main droite le long d'une spire, le courant allant de la base vers le bout des doigts, le pouce indique le sens du vecteur champ magnétique créé par ce courant (figure).

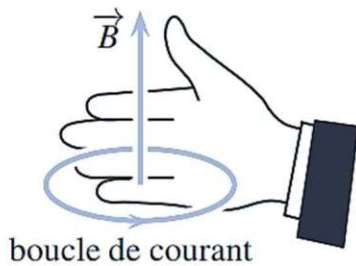


Figure. – Règle de la main droite : le courant tourne autour des lignes de champ magnétique qu'il crée.

Cette propriété est générale et elle permet d'orienter systématiquement le champ magnétique par rapport au courant qui le crée.

Règle des trois doigts de la main droite : Orientation du produit vectoriel : Règle des doigts de la main droite : $\vec{u} = \text{pouce}$; $\vec{w} = \text{index}$; $\vec{u} \wedge \vec{w} = \text{majour}$

7.2. Symétrie et antisymétrie de la distribution de courants

- **Le champ magnétique**

Soit M un point de l'espace où l'on souhaite calculer le champ magnétostatique \vec{B} créé par une distribution spatiale de courants électriques.

1. Si par le point M , passe un plan de symétrie pour la distribution des courants électriques, le champ magnétique \vec{B} est perpendiculaire à ce plan de symétrie.
2. Si par le point M , passe un plan d'antisymétrie pour la distribution des courants électriques, le champ magnétique \vec{B} est contenu dans ce plan d'antisymétrie.

- **Le potentiel vecteur**

Soit M un point de l'espace où l'on souhaite calculer le potentiel vecteur \vec{A} créé par une distribution spatiale de courants électriques.

1. Si par le point M , passe un plan de symétrie pour la distribution des courants électrique, le potentiel vecteur \vec{A} est contenu dans ce plan de symétrie.
2. Si par le point M , passe un plan d'antisymétrie pour la distribution des courants électriques, le champ vecteur \vec{A} est perpendiculaire à ce plan d'antisymétrie.

- **Exemples des plans de symétries et antisymétries**

On définit ici la symétrie ou l'antisymétrie d'une distribution de courant par rapport à un plan.

Distribution de courant symétrique par rapport à un plan Π_s Une distribution de courant admet un plan de symétrie Π_s , si la distribution de courant obtenue par symétrie par rapport au plan Π_s lui est identique.

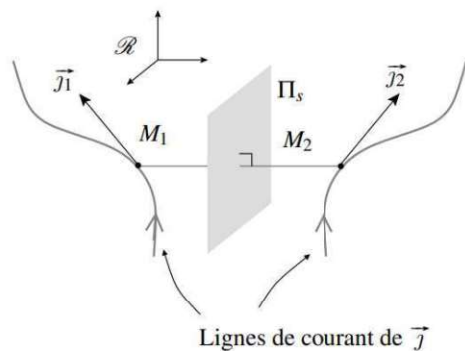


Figure. Distribution volumique de courant symétrique par rapport à un plan.

Distribution de courant antisymétrique par rapport à un plan Π_a Une distribution de courant admet un plan d'antisymétrie Π_a , si la distribution de courant obtenue par symétrie par rapport au plan Π_a lui est en tout point opposée (direction identique, sens opposé).

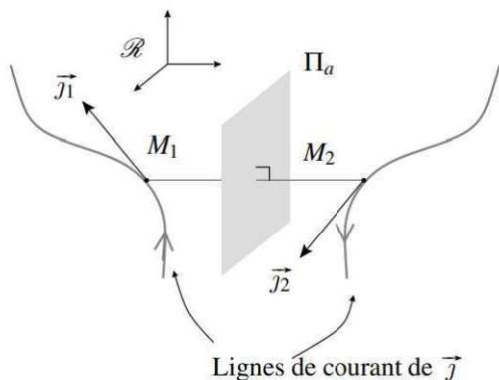


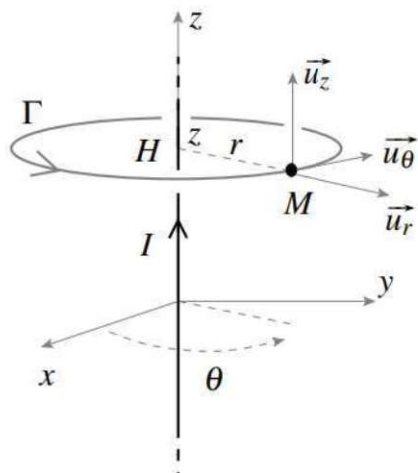
Figure. Distribution volumique de courant antisymétrique par rapport à un plan.

Exemple : Champ magnétostatique créé par un fil dans son voisinage : champ d'un fil infini

La distribution envisagée est un fil infini, confondu avec l'axe (Oz) , parcouru par le courant I constant, orienté selon \vec{u}_z .

i) Choix du repérage

Le repérage cylindrique est le mieux adapté à la situation, d'axe (Oz) confondu avec le fil.



a) Pour le champ \vec{B}

i) Étude des symétries

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$, qui contient M et l'axe (Oz), est un plan de symétrie pour la distribution de courants. On en déduit que le champ magnétique \vec{B} en M est perpendiculaire à $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$, et s'écrit : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\vec{u}_\theta$

ii) Étude des invariances

La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation selon l'axe (Oz), on en déduit que $B(M) = B(r)$.

b) Pour le potentiel vecteur \vec{A}

i) Étude des symétries

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, qui contient M et l'axe (Oz), est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courants. On en déduit que le potentiel vecteur \vec{A} en M est perpendiculaire à $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, et s'écrit : $\vec{A}(M) = A(r, \theta, z)\vec{u}_z$

ii) Étude des invariances

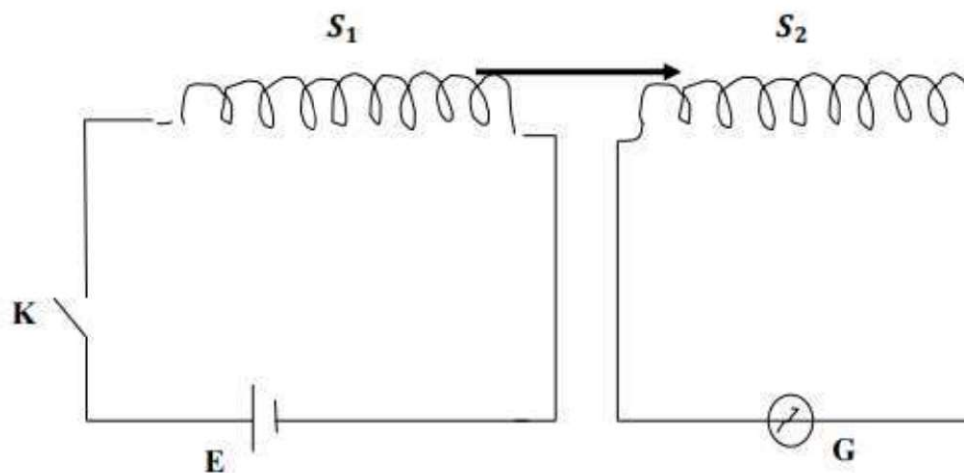
La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation selon l'axe (Oz), on en déduit que $A(M) = A(r)$.

Chapitre 2 : Induction électromagnétique

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes intéressés essentiellement à la création d'un champ magnétique à partir d'un courant permanent. Ceci fut motivé par l'expérience de Oersted. A la même époque, le physicien anglais Faraday était préoccupé par la question inverse : puisque ces deux phénomènes sont liés, comment produire un courant à partir d'un champ magnétique ? Il fit un certain nombre d'expériences qui échouèrent car il essayait de produire un courant permanent. En fait, il s'aperçut bien de certains effets troublants, mais ils étaient toujours transitoires.

L'induction électromagnétique est un phénomène multiforme, dont les différents aspects ont été découverts et étudiés par Faraday. Nous donnons quelques expériences typiques :

1^{ère} expérience : on enroule sur un même cylindre deux fils électriques. L'un est relié à un générateur et possède un interrupteur, l'autre est seulement relié à un galvanomètre, permettant ainsi de mesurer tout courant qui serait engendré dans ce second circuit. En effet, Faraday savait que lorsqu'un courant permanent circule dans le premier circuit, un champ magnétique serait engendré et il s'attendait donc à voir apparaître un courant dans le deuxième circuit. En fait rien de tel n'était observé : lorsque l'interrupteur était fermé ou ouvert, rien ne se passait. Par contre, lors de son ouverture ou de sa fermeture, une déviation fugace de l'aiguille du galvanomètre pouvait être observée (cela n'a pas été perçu immédiatement). Une telle déviation pouvait également s'observer lorsque, un courant circulant dans le premier circuit, on déplaçait le deuxième circuit.



2^{ème} expérience : prenons un aimant permanent et plaçons le à proximité d'une boucle constituée d'un fil conducteur relié à un galvanomètre. Lorsque l'aimant est immobile, il n'y a pas de courant mesurable dans le fil. Par contre, lorsqu'on déplace l'aimant, on voit apparaître un courant dont le signe varie selon qu'on approche ou qu'on éloigne l'aimant. De plus, ce courant est d'autant plus important que le déplacement est rapide.

Ces deux types d'expériences ont amené Faraday à écrire ceci : « Quand le flux du champ magnétique à travers un circuit fermé change, il apparaît un courant électrique. »

1. Les lois de l'induction

Le phénomène d'induction : Un circuit filiforme au repos et parcouru par un courant invariable n'entraîne l'apparition d'aucune f.é.m ou d'aucun courant dans un autre circuit filiforme au repos. Il n'en est pas de même si le courant varie ou si les circuits en présence se déplacent l'un par rapport à l'autre : la f.é.m ou le courant qui apparaissent sont dus au phénomène d'induction. Ce phénomène entraîne l'apparition d'un champ électrique supplémentaire (appelé champ induit) ; ce qui conduit à modifier la propriété fondamentale du champ électrique.

Les cas de variations du flux du champ magnétique à travers un circuit sont :

- Le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent,
- Le cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique variable,
- le cas général d'un circuit mobile dans un champ magnétique variable

1.1. Circuit (bobine) mobile dans un champ magnétique permanent

Déplaçons une bobine près des pôles d'un aimant en U fixe. On constate l'apparition d'un courant dans la bobine et par conséquent une tension u_e alors qu'aucun générateur ne figure dans le circuit. u_e est positive lorsque la bobine s'approche de l'aimant et négative lorsque celle-ci s'en éloigne; l'amplitude de u_e augmente avec la vitesse du déplacement imposée à la bobine. Donc un circuit se déplaçant dans un champ magnétique permanent se comporte comme un générateur électrocinétique. Il est le siège d'un courant induit ; on parle de l'induction de Lorentz.

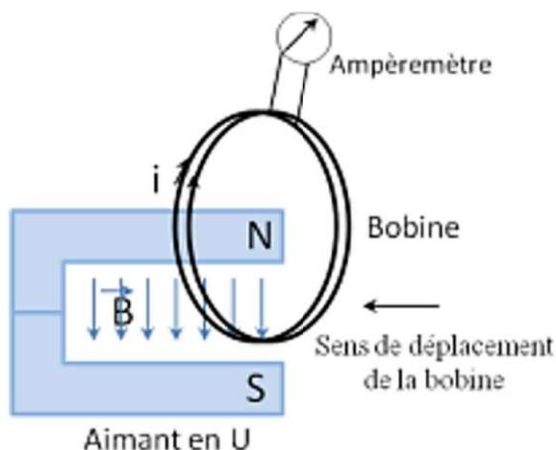


Figure. Bobine en mouvement dans un champ \vec{B} constant

- **Interprétation**

la bobine considérée se déplace avec une vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B} statique. Orientons arbitrairement ce circuit dans un sens positif. Soit dq la charge électrique contenue dans une portion dl du circuit.

La force magnétique de Lorentz agissant sur chaque particule q du circuit est :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Qui peut être écrite sous forme de champ électrique \vec{E}_m appelé champ électromoteur:

$$\vec{F} = q\vec{E}_m$$

Avec $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$

Fournissant ainsi une force électromotrice e (sur le contour fermé (circuit)):

$$e = \oint \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

D'autre part, pendant un temps dt , la variation du flux magnétique total à travers une surface quelconque s'appuyant sur le circuit (C) est $d\phi$; la f.é.m induite e s'exprime à l'aide de la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi_c}{dt}$$

Cette loi, établie expérimentalement pour des variations relativement lentes du flux magnétique en fonction du temps, est valable pour tout régime variable et elle sert de base à l'étude de l'électromagnétisme classique.

Enoncé de la loi Faraday: la variation temporelle du flux magnétique à travers un circuit fermé y engendre une f.e.m. induite.

1.2. Bobine fixe dans un champ magnétique variable

En rapprochant l'inducteur (aimant) de la bobine fixe, il se produit dans celle-ci un courant induit dont le sens est tel que sa face supérieure soit une face nord. Ainsi, Entre le pôle nord de l'aimant et la face nord de la bobine s'exercent des forces répulsives. L'opérateur a fourni un certain travail positif et l'énergie correspondante se retrouve sous forme électrique dans l'induit. Si l'aimant et la bobine sont immobiles le courant induit est nul. Au contraire, lorsque l'aimant s'éloigne de la bobine le courant change de sens. Ce dispositif se comporte comme un générateur électrocinétique capable de produire un courant. On parle de l'induction de Neumann.

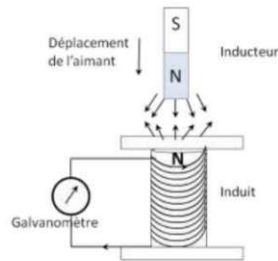


Figure. Bobine fixe dans un champ \vec{B} variable (induction de Neumann)

- **Interprétation**

Ici on a considéré que l'aimant s'approchant d'un circuit électrique fixe. Ainsi \vec{B} présente une variation temporelle. Si on considère le référentiel lié au circuit, l'expression de la force de Lorentz se réduit à la force électrique donc à un champ électrique. La circulation de ce champ le long du circuit engendre une force électromotrice e :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

On retrouve la même expression que celle du circuit mobile dans un \vec{B} invariable. Les phénomènes d'inductions sont les mêmes dans les deux cas (Faraday et Neumann), ils ne diffèrent que par la position de l'observateur.

D'autre part :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} = -e = -\oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\iint \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

C'est ainssi que :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

1.3. Bobine mobile dans un champ magnétique variable

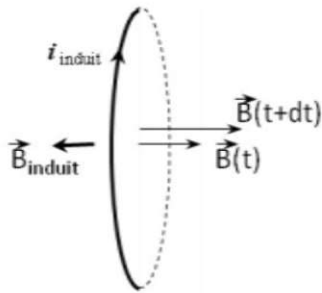
De façon générale dans le cas d'un circuit se déplaçant dans un champ magnétique variable:

$$e = -\frac{d\phi_c}{dt} - \iint \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

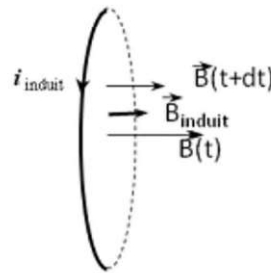
1.4. Loi de Lenz

Enoncé de la loi: l'induction produit des effets qui s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance, c'est à dire à la variation du flux d'induction.

En faite, la loi de Lenz ne fait que traduire le signe « - » contenu dans la loi de Faraday.



Bobine soumise à un \vec{B} croissant



Bobine soumise à un \vec{B} décroissant

Remarques

i- Pour des phénomènes d'induction dus à une variation de B (le circuit étant immobile), le courant induit va créer un champ magnétique qui s'opposera à cette variation.

ii- Si au contraire, il y a déplacement relatif du circuit par rapport à B, les forces électromagnétiques dues au courant induit vont s'opposer à ce déplacement (c'est le freinage électromagnétique).

2. Auto-induction et induction mutuelle

2.1- Auto induction ou induction propre

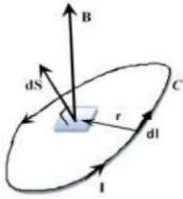
Soit un circuit fermé parcouru par I . Ce circuit engendre un champ \vec{B} dans tout l'espace et par conséquent il existe un flux \vec{B} de à travers le circuit lui-même.

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \left[\iint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \cdot d\vec{S} \right] I$$

$$\phi = LI$$

L est le coefficient d'auto induction ou auto inductance ou self induction, exprimé en Henry. Il ne dépend que de la géométrie du circuit et il est toujours positif.



2.2- Forces électromotrices d'auto-induction

On se limitera au cas d'un circuit rigide. Dans ce cas particulier l'inductance L est constante. Si I varie ; le flux varie et la fem d'auto-induction est donnée par :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

La f.e.m. d'auto-induction tend à produire un courant qui s'oppose à la variation du courant dans le circuit (Loi de Lenz).

Exemple : Soit un seul circuit comme une bobine par exemple (solénoïde de N spires). Le courant i provoque un champ B qui lui-même génère un flux d'induction ϕ .

$$\phi_{\text{solénoïde}} = N\phi_{\text{spire}} = LI$$

Le coefficient d'auto-inductance est donné par :

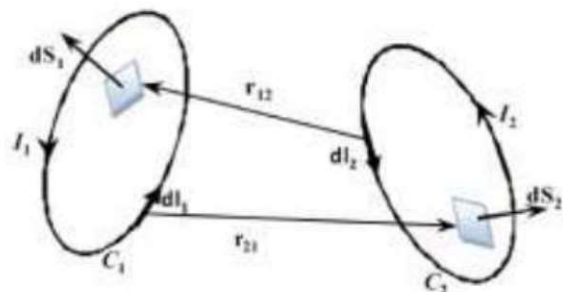
$$L = \frac{N\phi_{\text{spire}}}{I}$$

Une variation de I va générer au sein de la bobine une force électromotrice self-induite e , tel que :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -N\frac{d\phi_{\text{spire}}}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

2.3- Induction mutuelle entre deux circuits fermés

Soient C_1 et C_2 deux circuits fermés, orientés, traversés respectivement par les courants I_1 et I_2 et placés l'un à côté de l'autre.



C_1 crée en C_2 un champ magnétique \vec{B}_1 dont le flux ϕ_{12} à travers C_2 est donné par l'expression :

$$\phi_{12} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \left[\iint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \cdot d\vec{S}_2 \right] I_1$$

$$\phi_{12} = M_{12}I_1$$

De même, C2 crée en C1 un champ magnétique \vec{B}_2 dont le flux ϕ_{21} à travers C1 est donné par l'expression :

$$\phi_{21} = \iint \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \left[\iint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \cdot d\vec{S}_1 \right] I_2$$

$$\phi_{21} = M_{21}I_2$$

Les termes M_{12} et M_{21} sont appelés coefficients d'induction mutuelles ou induction mutuelles, leur unité est le Henry (H). Ils dépendent de la distance entre les deux circuits et de la géométrie liés à la forme de chaque circuit. coefficients $M_{1 \rightarrow 2}$ et $M_{2 \rightarrow 1}$ sont égaux d'après le théorème de Neumann que l'on admettra ici. Leur valeur commune M est appelé inductance mutuelle entre les circuits 1 et 2. M est positif (négatifs) si les circuits C1 et C2 sont parcourus par des courants de même sens (de sens opposé).

Le flux total à travers C1 et C2 s'écrit :

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = L_1I_1 + M_{12}I_2 \\ \phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21} = L_2I_2 + M_{21}I_1 \end{cases}$$

- ϕ_{11} : Flux de \vec{B}_1 à travers S_1
- ϕ_{22} : Flux de \vec{B}_2 à travers S_2
- ϕ_{12} : Flux de \vec{B}_1 à travers S_2
- ϕ_{21} : Flux de \vec{B}_2 à travers S_1

3. Énergie magnétique

L'énergie magnétique d'un circuit d'auto-inductance L , parcouru par un courant d'intensité I est :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}LI^2$$

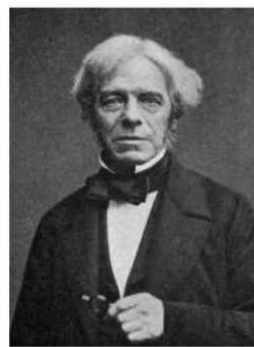
L'énergie magnétique de deux circuits 1 et 2, couplés par mutuelle induction décrite par le coefficient d'inductance mutuelle M, est :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2$$

Chapitre 3 : Equations de Maxwell dans le vide

Introduction

Maxwell (1831-1879): formalisation mathématique des travaux antérieurs sur l'électricité et le magnétisme, réalisés notamment par Gauss (1777-1855), Faraday (1791-1867) et Ampère (1775-1836). Il proposa un ensemble d'équations présentées la première fois à la Royal Society en 1864 qui décrivent le champ électrique et le champ magnétique ainsi que leur interaction avec la matière (charges et courants). Mais il faudra attendre l'avènement de l'analyse vectorielle au 20ème siècle pour aboutir aux 4 équations modernes.



Maxwell, Gauss, Faraday, Ampère, pionniers de l'électromagnétisme (Wikipedia)

Les équations de Maxwell, aussi appelées équations de Maxwell-Lorentz, sont des lois fondamentales de la physique. Elles constituent les postulats de base de l'électromagnétisme, avec l'expression de la force électromagnétique de Lorentz.

Ces équations traduisent aussi sous forme locale différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui régissaient l'électromagnétisme avant que Maxwell ne les réunisse sous forme d'équations intégrales. Elles donnent ainsi un cadre mathématique précis au concept fondamental de champ introduit en physique par Faraday dans les années 1830.

Ces équations montrent notamment qu'en régime stationnaire, les champs électrique et magnétique sont indépendants l'un de l'autre, alors qu'ils ne le sont pas en régime variable. Dans le cas le plus général, il faut donc parler du champ électromagnétique, la dichotomie électrique/magnétique étant une vue de l'esprit.

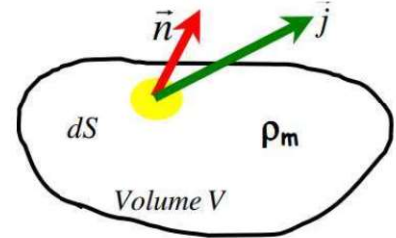
Les équations de Maxwell sont les plus beaux et importantes équations dans la théorie des champs. Parce que, il a pu avec ses équations relier le champ électrique et le champ magnétique dans des équations mathématique. Il a démontré que la variation du champ magnétique dans le temps produit un champ électrique et vice versa. Cette relation est la base de la propagation des ondes Hertzienne, c'est à dire les ondes radio et télévision.

Les équations de Maxwell sont des lois fondamentales de la physique, et sont au nombre de quatre (Maxwell-Gauss, Maxwell-Faraday, Maxwell-Flux et Maxwell-Ampère). L'ensemble de ces équations se rapportent à l'électromagnétisme, et plus particulièrement à la description des phénomènes magnétiques, électriques, et lumineux.

1. Équation de conservation de la charge

La conservation de la charge est un des principes fondamentaux de la physique, au même titre que la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie, etc. Pour un volume de contrôle V fixe, délimité par une surface S fermée, la charge totale contenue dans ce volume est

$$Q(t) = \iiint \mu_m d\tau$$



La variation de charge $dQ(t)$ est due aux déplacements des charges qui peuvent entrer ou sortir du volume V . Si on note $\vec{n}dS$ le vecteur unitaire sortant à la surface S , la conservation de la charge électrique permet d'écrire :

$$i(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$$

Le signe moins indique la perte de charge quand les charges quittent le volume ($dQ(t) < 0$).

Ainsi on :

$$i(t) = \iint \vec{j} ds \vec{n}$$

Ce qui donne

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\oiint \vec{j} d\vec{s}$$

D'autre part ;

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \iiint \frac{d\mu_m(M, t)}{dt} d\tau = -\oiint \vec{j} d\vec{s}$$

L'intégrale de surface peut être transformée en intégrale de volume par le théorème de Green-Ostrogradski, ce qui donne finalement

$$\oiint \vec{j} d\vec{s} = \iiint \text{div} \vec{j} \cdot d\tau$$

Alors ;

$$\iiint \frac{d\mu_m(M, t)}{dt} d\tau = -\iiint \text{div} \vec{j} \cdot d\tau$$

$$\iiint \left(\frac{d\mu_m(M, t)}{dt} + \text{div} \vec{j} \right) d\tau = 0$$

Donc

$$\frac{d\mu_m(M, t)}{dt} + \text{div} \vec{j} = 0$$

Cette relation est appelée la loi de conservation de la charge.

2. Equations de Maxwell

Ce sont des relations de types vectoriels liants le champ électrique au champ magnétique avec des paramètres traduisant la matière (Perméabilité μ_0 , Permittivité ϵ_0 , Conductivité σ) dans la quelle se propage l'onde électromagnétique.

2.1. Equation de Maxwell-Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss est la forme locale du théorème de Gauss :

Équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\mu_m(M, t)}{\epsilon_0}$$

On calcule les charges intérieures à la surface de Gauss par intégration de la densité volumique de charges :

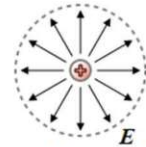
$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \mu_m(M, t) d\tau$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky

$$\iiint \operatorname{div} \vec{E} d\tau = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \mu_m(M, t) d\tau$$

Donc, la formule de Maxwell-Gauss stipule que la divergence du champ électrique est proportionnelle à la distribution de charges électriques.

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\mu_m(M, t)}{\epsilon_0}$$



Avec le vecteur \vec{E} qui est le champ électrique en V/m, Q la distribution de charges en C/m³ et la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 en C/V/m.

Cette équation signifie que le champ électrique (\vec{E}) est divergeant (ou convergent en fonction du signe de la charge) à partir d'une source (qui est la charge (+) sur le schéma). Ainsi, $\operatorname{div}(\vec{E})$ est proportionnel à la distribution ($\mu_m(M, t)$) des charges. Remarque : Le rotationnel du champ électrique sur ce premier schéma est nul, contrairement au schéma qui va suivre avec l'équation de Maxwell-Faraday.

2.2. Equation de Maxwell-Flux

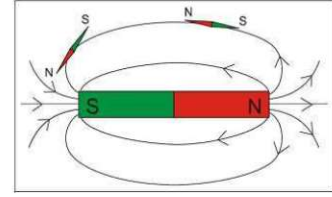
Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul :

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky, on en déduit que la forme locale équivalente s'écrit :

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$$

La formule de Maxwell-Flux (aussi connue sous le nom de Maxwell-Thomson ou Maxwell-Kelvin ; Thomson et Kelvin étant une et même personne) stipule que la divergence du champ magnétique est nulle.



En effet, les lignes de champ magnétique ne divergent pas ; elles sortent d'un pôle (positif ou négatif) pour aller dans l'autre. Cela signifie aussi qu'il n'existe pas de monopôle magnétique (nord ou sud), en effet, tous les aimants possèdent deux pôles.

b) Équation de Maxwell-Faraday

La circulation du champ électromoteur vérifie la relation :

$$e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Avec

$$\frac{d\phi}{dt} = \iint \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} \quad \text{et} \quad \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \iint \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Th. Stokes})$$

C'est ainsi que :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Cette formule de Maxwell-Faraday correspond au phénomène d'induction et stipule que le rotationnel du champ électrique (\vec{E}) est inversement (signe moins) proportionnel à la variation du champ magnétique au cours du temps ($\frac{d\vec{B}}{dt}$).

Cette équation signifie que c'est la variation du champ magnétique ($\frac{d\vec{B}}{dt}$) qui produit un champ électrique (\vec{E}), et non le champ magnétique tout seul (\vec{B}), (par exemple, une dynamo immobile sur un vélo n'alimente pas les lumières ; en revanche lorsque l'on roule, les lampes s'allument, car il y a variation du champ magnétique).

2.4. Equation de Maxwell-Ampère

En prenant la divergence du théorème d'Ampère, on trouve que

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = \mu_0 \text{div}\vec{J} = 0$$

Car la divergence d'un rotationnel est toujours nulle. Cela implique que $\frac{d\mu_m(M,t)}{dt} = 0$ et limite donc la portée du théorème d'Ampère aux régimes permanents. Maxwell s'est beaucoup intéressé aux analogies entre les champs \vec{E} et \vec{B} . Mais seule la relation d'induction comporte un terme instationnaire portant sur le champ électrique. Maxwell a donc proposé de modifier le théorème d'Ampère pour y ajouter un terme instationnaire portant sur le champ magnétique. Écrivons cette relation modifiée sous la forme:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \alpha \frac{d\vec{E}}{dt}$$

avec une constante α qui sera déterminée par la conservation de la charge. En appliquant la divergence à cette relation, on obtient cette fois :

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) = \mu_0 \operatorname{div} \vec{J} + \alpha \frac{d}{dt} (\operatorname{div}(\vec{E})) = 0$$

D'après la relation de Coulomb-Gauss :

$$\frac{d}{dt} (\operatorname{div}(\vec{E})) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_m(M, t)}{\epsilon_0} \right)$$

Et d'après la loi de conservation de la charge, on a

$$\frac{d\mu_m(M, t)}{dt} = -\operatorname{div} \vec{J}$$

Alors ;

$$-\mu_0 \frac{d\mu_m(M, t)}{dt} + \alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_m(M, t)}{\epsilon_0} \right) = 0$$

Donc

$$\alpha = \epsilon_0 \mu_0$$

Le principe de conservation de la charge est maintenant compatible avec une relation de Maxwell-Ampère écrite sous la forme

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

Le terme ajouté par Maxwell se présente sous la forme d'un courant appelé courant de déplacement. De son vivant, Maxwell n'a jamais vu la vérification expérimentale de son hypothèse de courant de déplacement. Ce n'est qu'en 1887 avec les travaux de Hertz que la théorie de Maxwell a été complètement vérifiée. Les travaux de Hertz ont donné naissance aux premières télécommunications, l'ère de la radio pouvait commencer.

Cette relation décrit le couplage entre champ magnétique et électrique, et avec la source du champ magnétique : le champ magnétique ne tourne que s'il existe un courant électrique ou s'il existe un champ électrique variable dans le temps ; et réciproquement.

Sous forme intégrale (loi d'Ampère), on obtient, en appliquant la formule du rotationnel :

$$\oint \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{S} + \oint \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

D'après le théorème de Stokes, on trouve :

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

La circulation de l'induction magnétique le long d'un contour fermé est donc liée :

- d'une part, au courant électrique traversant la surface délimitée par le contour
- d'autre part, aux variations du flux électrique à travers cette même surface.

3. Lien avec la conservation de la charge

Les quatre équations de Maxwell sont compatibles avec l'équation de conservation de la charge. Si l'on prend en effet la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \operatorname{div} \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

Ce qui donne (d'après Maxwell-Gauss) ;

$$\frac{d\mu_m(M, t)}{dt} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

L'équation de conservation de la charge est donc contenue dans les équations de Maxwell. La théorie électromagnétique de Maxwell ne permet ni l'apparition, ni la disparition de charges.

4. Equations de Maxwell dans le vide

Dans le vide, ou à tout le moins loin des sources, on a $\forall t, \vec{J} = \vec{0}$, $\mu_m(M, t) = 0$. Donc les équations de Maxwell devient :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = 0 \quad (\text{Maxwell} - \text{Gauss})$$

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{Maxwell} - \text{Flux})$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (\text{Maxwell} - \text{Faraday})$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (\text{Maxwell} - \text{Ampère})$$

5. Démonstration de l'équation de propagation

5.1. Équations de d'Alembert

On se place dans une région où il n'y a ni charges ni courants, c'est-à-dire dans une région qui n'englobe pas les sources du champ électromagnétique.

Prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right)$$

Les opérateurs rotationnel (qui dépend des coordonnées spatiales) et dérivation par rapport au temps portent sur des variables indépendantes donc ils commutent. L'équation précédente s'écrit :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) = -\frac{d}{dt} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}$$

Rappelons la formule, applicable à tout champ de vecteurs suffisamment régulier \vec{W} ,

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{W}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{W}) - \Delta \vec{W}$$

où $\Delta \vec{W} = \left(\frac{d^2 \vec{W}}{dx^2}, \frac{d^2 \vec{W}}{dy^2}, \frac{d^2 \vec{W}}{dz^2} \right)$ est l'opérateur laplacien. On peut écrire :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

Vu que $\operatorname{div}(\vec{E}) = 0$ (Maxwell - Gauss), on trouve :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = -\Delta\vec{E}$$

Finalement l'équation de propagation devient :

$$\Delta\vec{E} - \epsilon_0\mu_0 \frac{d^2}{dt^2}\vec{E} = \vec{0}$$

On peut faire de même en utilisant les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Farad. le champ magnétique vérifie l'équation suivante :

$$\Delta\vec{B} - \epsilon_0\mu_0 \frac{d^2}{dt^2}\vec{B} = \vec{0}$$

Ces équations sont des équations de d'Alembert.

Par exemple, une Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) de la forme :

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

est solution de l'équation de d'Alembert ; $\vec{r} \rightarrow OM(x, y, z)$ désigne un point M de l'espace ; le vecteur d'onde \vec{k} indique la direction de propagation.

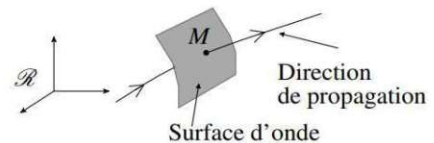
5.2. Onde Plane Progressive Harmonique

L'onde électromagnétique en M à l'instant t est caractérisée par trois vecteurs : le champ électrique $\vec{E}(r, t)$, le champ magnétique $\vec{B}(r, t)$, auxquels on ajoute le vecteur directeur $\vec{u}(r, t)$ de sa direction de propagation.

5.2.1. Onde sphérique et onde plane

a) Surface d'onde

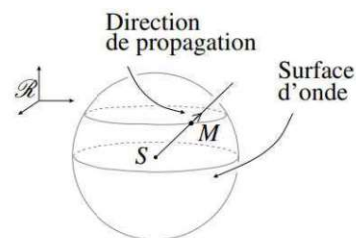
Lorsqu'une onde se propage dans l'espace, une surface d'onde Σ , à l'instant t, est un ensemble de points d'égale valeur de la vibration émise par la source.



Surface d'onde au voisinage de M.

b) Onde sphérique

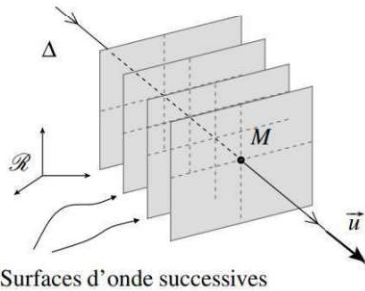
On définit une onde sphérique comme une onde dont les surfaces d'onde sont des sphères concentriques. Une telle onde modélise l'onde émise par une source localisée au point S et qui rayonne dans toutes les directions.



Onde sphérique

c) Onde plane

On définit une onde plane comme une onde dont les surfaces d'onde sont des plans. Sur la figure ci-après, on représente des portions de plans d'onde, perpendiculaires à la direction de propagation. Une onde plane modélise l'onde émise par une source à l'infini. Elle est considérée à très grande distance de la source, les portions de plans d'onde sont tangents à des sphères dont le centre S est situé à l'infini. Dans la suite on étudie une onde électromagnétique plane progressive harmonique, qui modélise localement une onde électromagnétique vue à grande distance de la source, c'est-à-dire à une distance $D \gg \lambda$.



5.2.2. Structure des ondes électromagnétiques planes progressives et harmoniques dans le vide

Une onde électromagnétique est composée de deux champs $\vec{E}(r, t)$ et $\vec{B}(r, t)$ qui doivent vérifier non seulement l'équation de d'Alembert, mais aussi vérifier les équations de Maxwell. Il en résulte des propriétés que l'on va établir ici. Pour les calculs on prend un repère cartésien tel que la direction de propagation est $\vec{u} = \vec{u}_x$, mais à la fin on exprimera les conclusions sous une forme indépendante du repère.

Les champs sont uniformes dans un plan d'onde à x donné :

$$\vec{E}(r, t) = \begin{pmatrix} E_x(x, t) \\ E_y(x, t) \\ E_z(x, t) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B}(r, t) = \begin{pmatrix} B_x(x, t) \\ B_y(x, t) \\ B_z(x, t) \end{pmatrix}$$

5.2.2.1. Transversalité des ondes électromagnétiques planes

L'équation de Maxwell Gauss implique :

$$\text{div}(\vec{E}) = 0 = \frac{dE_x}{dx} + \frac{\overset{0}{dE_y}}{dy} + \frac{\overset{0}{dE_z}}{dz} = 0$$

Ce qui donne :

$$\frac{dE_x}{dx} = 0$$

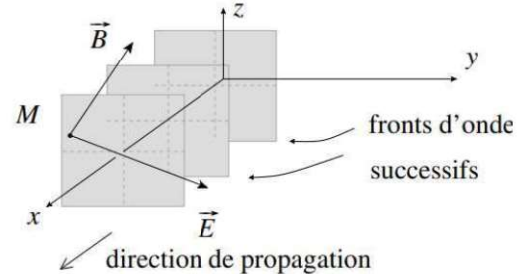
De la même manière l'équation de Maxwell-flux entraîne la nullité du dérivé de la composante du champ magnétique le long de la direction de propagation.

$$\frac{dB_x}{dx} = 0$$

On en déduit, après intégration, que E_x et B_x ne dépendent que du temps : $E_x = f_1(t)$, $B_x = f_2(t)$. Mais de telles solutions ne conviennent pas pour des ondes, puisqu'elles ne dépendent pas de la coordonnée d'espace. On en déduit que les composantes $f_1(t)$ et $f_2(t)$ selon \vec{u}_x des champs électrique et magnétiques de l'onde sont nulles :

$$\vec{E}(r, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(x, t) \\ E_z(x, t) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B}(r, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y(x, t) \\ B_z(x, t) \end{pmatrix}$$

Les champs $\vec{E}(r, t)$ et $\vec{B}(r, t)$ d'une OPP électromagnétique dans le vide sont perpendiculaires à la direction de propagation. On dit qu'ils sont transversaux et que l'onde est transversale. Ceci provient de la nullité de leur divergence.



Transversalité d'une onde plane.

6. Relation de dispersion

L'onde plane progressive sinusoïdale est définie, en notation complexe, par :

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

où \vec{k} est le vecteur d'onde donnant la direction de propagation de l'onde plane. L'équation de propagation s'écrit alors sous la forme:

$$(k^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0) \vec{E} = \vec{0}$$

Donc, l'onde plane progressive sinusoïdale constitue une solution particulière de l'équation d'onde seulement si la relation suivante, dite relation de dispersion, est satisfaite :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Avec

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Exemple

Soit une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide, caractérisée par :

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \text{ et } \vec{B}(r, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

1. Montrer que \vec{E} et \vec{k} sont perpendiculaires. En déduire que le champ électrique est transversal.
2. Montrer que

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

3. Montrer que les quatre équations de Maxwell dans le vide peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \\ -i\vec{k} \wedge \vec{E} &= -i\omega\vec{B} \\ -i\vec{k} \wedge \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \omega\vec{E}\end{aligned}$$

Solution

1. En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, on montre aisément que pour une onde plane progressive sinusoïdale :

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Ce qui revient à dire que le champ électrique \vec{E} est perpendiculaire à la direction de propagation donnée par le vecteur d'onde \vec{k} . Le champ électrique est dit transversal.

2. L'onde plane progressive sinusoïdale doit également satisfaire le théorème de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Ce qui donne

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Chapitre 4 : Courant alternatif

Dans le cours de l'électrocinétique nous avons examiné des circuits qui comportaient différentes combinaisons de résistances, de condensateurs et d'inducteurs alors qu'ils étaient soit alimentés par une source de f.é.m. continue, soit indépendants de toute source d'énergie. Les seules variations dans le temps que nous avons observées résultaient soit du temps que le courant mettait pour s'établir, lorsqu'on basculait un interrupteur, soit de l'oscillation de charges entre les armatures d'un condensateur initialement chargé. Voyons maintenant ce qui se passe lorsqu'on connecte ces divers éléments à une source de f.é.m. qui délivre une f.é.m. alternative et plus particulièrement une f.é.m. de forme sinusoïdale.

Pour des raisons historiques, principalement technologiques, l'énergie est aujourd'hui très largement produite, transportée, distribuée et consommée en courant alternatif. En réalité, on devrait dire sous tension alternative, car c'est la tension (en volts) qui est imposée. En électricité, la tension est généralement notée v ou u . Alternative signifie qu'elle oscille autour d'une valeur moyenne nulle, en outre, sa forme d'onde $v(t)$ est de type sinusoïdal (voir figure 1). La fréquence, notée f , de ses alternances entre une valeur positive maximale V_M et une valeur négative minimale $-V_M$ est égale soit à 50 Hz (hertz), soit à 60 Hz selon les zones géographiques. 50 Hz signifie 50 périodes par seconde, donc une période, notée T , de $1/50 = 20$ ms (millisecondes). L'amplitude (valeur maximale ou crête) est notée V_M (en volts), mais la grandeur généralement spécifiée est la valeur efficace notée simplement V (voire V_{eff} ou V_{rms} en anglais). Par exemple, le réseau domestique marocain délivre une tension nominale (efficace) de 230 V (et non plus 220 V comme on le dit souvent) avec une tolérance de +/- 10% (soit une fourchette de 207 V à 253 V) et une fréquence de 50 Hz qui dévie très peu de sa valeur nominale et que nous considérerons constante. Pour une forme d'onde sinusoïdale, la relation entre l'amplitude (valeur maximale) V_M et la valeur efficace V est : $V_M = \sqrt{2} \cdot V$ avec $\sqrt{2} \cong 1,414$, ce qui signifie que l'amplitude de la tension correspondant à 230 V vaut 325 V. La tension distribuée est ainsi caractérisée principalement par deux grandeurs: sa valeur efficace et sa fréquence. Pour être rigoureux, on devrait parler de tension alternative sinusoïdale, mais on parlera dans la suite de tension alternative, tout court.

Nous nous abordons dans ce chapitre l'étude des circuits alimentés par des tensions alternatives sinusoïdales. Ce chapitre se propose de (d') :

- analyser les courants qui s'établissent dans des circuits comprenant des résistances R , des capacités C et d'inductances L dans le cas où des f.é.m. sinusoïdales sont appliquées aux bornes de ces circuits
- étudier le phénomène de résonance dans un circuit RLC
- déterminer les puissances en courant alternatif : facteur de puissance, puissance active et puissance réactive

1. Sources de courant électrique

Il existe deux type de sources de courant électrique

- les sources de courant électrique continu, exemple les piles plates et les piles cylindriques, on les symbolise par



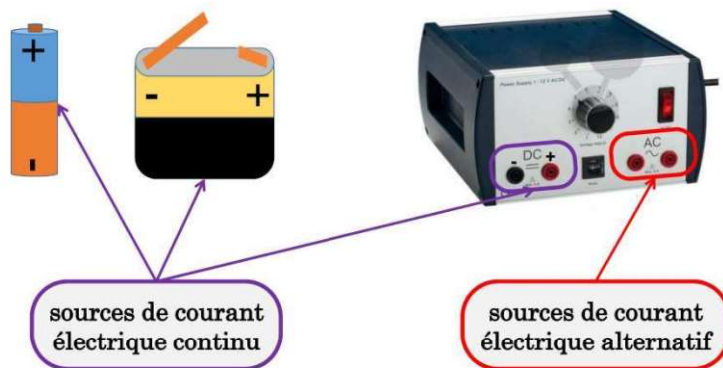
Les sources de courant électrique continu se caractérisent par une tension constante (invariable) au cours du temps.

- les sources de courant électrique alternatif, exemple les générateurs. On les symbolise par



Les sources de courant électrique alternatif sinusoïdal se caractérisent par une tension qui varie au cours du temps

Exemple.



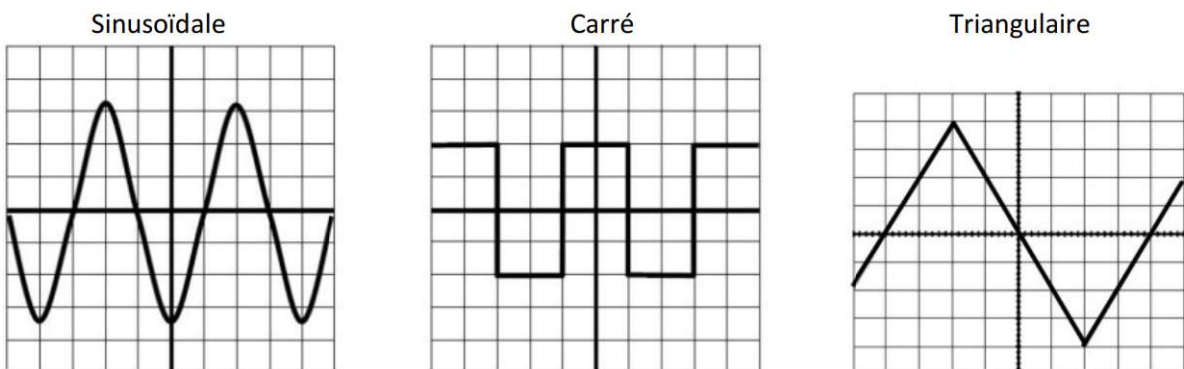
2. Courant alternatif

On appelle courant alternatif un courant électrique dont l'intensité est une fonction :

- périodique du temps $s(t + T) = s(t) = s(t + nT)$
- de valeur moyenne algébrique nulle ne compte sur un nombre entier de périodes (n).

Exemples de courant alternatif

En plus du courant électrique alternative sinusoïdale, il existe d'autres tensions qui varient avec le temps:



3. Courant alternatif sinusoïdal

Un courant alternatif sinusoïdal est un courant bidirectionnel périodique. Il en est de même pour une tension alternative sinusoïdale.

$$\text{Tension : } u(t) = U_{Max} \sin (\omega t + \varphi_u)$$

$$\text{Courant : } i(t) = I_{Max} \sin (\omega t + \varphi_i)$$

Avec $i(t)$ est la valeur instantanée du courant, I_{Max} sa valeur maximale ou amplitude, ω la pulsation ou fréquence angulaire et φ_i la phase. $u(t)$ est la valeur instantanée de tension, U_{Max} sa valeur maximale ou amplitude, ω la pulsation ou fréquence angulaire et φ_u la phase.

3.1. Valeur efficace

La valeur efficace d'un courant alternatif est définie comme la racine carrée de la moyenne du carré de l'intensité calculée sur une période. Elle s'écrit :

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

Dans le cas d'un courant alternatif sinusoïdal, on obtient:

$$I_{eff} = \frac{I_{Max}}{\sqrt{2}}$$

La valeur instantanée d'un tel courant s'écrit alors :

$$i = I_{eff} \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi_i)$$

De la même manière, une tension électrique alternative sinusoïdale est caractérisée aussi par une valeur efficace U_{eff} qui peut être mesurée à l'aide d'un voltmètre.

$$u(t) = U_{eff} \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi_u)$$

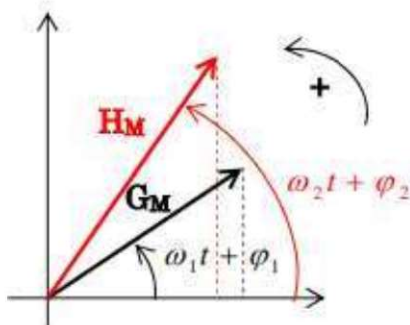
La valeur efficace est celle indiquée par les voltmètres et les ampèremètres. Ainsi quand on parle du réseau électrique domestique à 220 V il s'agit bel et bien de la valeur efficace de la tension.

3.2. Représentation vectorielle (vecteurs de Fresnel)

On peut faire correspondre à toute fonction sinusoïdale un vecteur de Fresnel partant de l'origine du repère, de module l'amplitude de la fonction et faisant un angle égale à sa phase instantanée avec l'axe (Ox) pris comme origine des phases, grâce à sa projection sur l'axe (Ox).

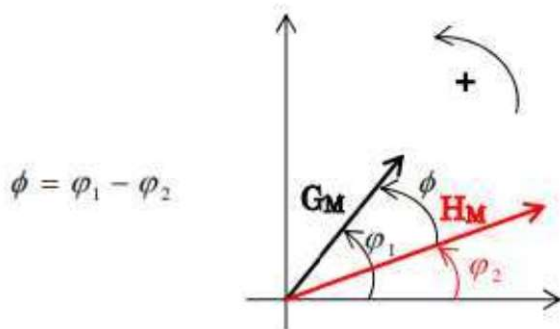
Le vecteur de Fresnel associé à un signal sinusoïdal est un vecteur tournant dont la vitesse angulaire est égale à la pulsation du signal. La norme de ce vecteur est égale à l'amplitude maximale du signal et l'angle polaire est à tout instant égal à la phase instantanée du signal. La valeur algébrique du signal est donnée par la projection du vecteur tournant sur l'axe de référence pour la phase.

Par exemple, pour deux tensions $h(t) = H_M \sin (\omega_2 t + \varphi_2)$ et $g(t) = G_M \sin (\omega_1 t + \varphi_1)$, on a :



La tension instantanée est donnée par la composante y de ce vecteur.

Lorsqu'on ne compose que des signaux de même période, on ne s'intéresse en fait qu'aux déphasages relatifs. Il n'est donc pas nécessaire de faire tourner les vecteurs. On se contente d'un vecteur fixe ayant pour norme l'amplitude maximale du signal et pour angle polaire son déphasage.



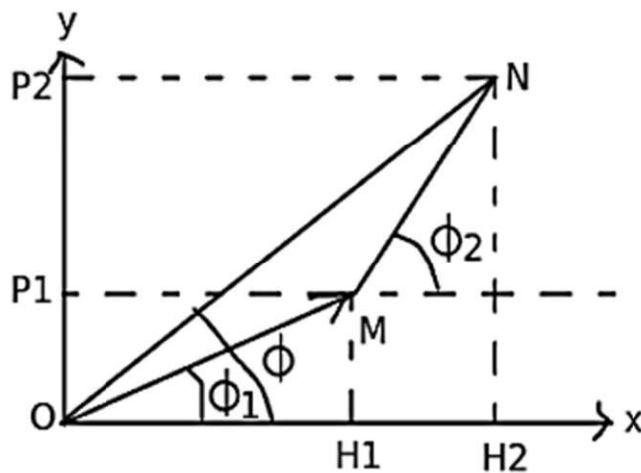
Dans le cas de plusieurs signaux de même fréquence, l'un d'eux est utilisé comme origine pour les phases.

En plus, la valeur maximale est proportionnelle à la valeur efficace, donc on peut raisonner sur un vecteur d'amplitude la valeur efficace. La représentation de Fresnel, n'est facilement exploitable en électricité que pour des circuits très simples.

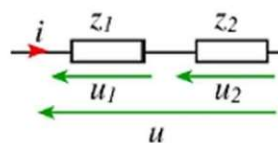
Exemple :

A. Représentation de Fresnel : somme de deux grandeurs sinusoïdales

- * Si $i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ et $i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \phi_2)$ deux courants sinusoïdaux, $i_1(t)$ et $i_2(t)$ sont représentés par \vec{OM} et \vec{MN} respectivement.
- * $OH_2 = I \cos(\phi) = OH_1 + H_1H_2 = I_1 \cos(\phi_1) + I_2 \cos(\phi_2)$
- * $OP_2 = I \sin(\phi) = OP_1 + P_1P_2 = I_1 \sin(\phi_1) + I_2 \sin(\phi_2)$.

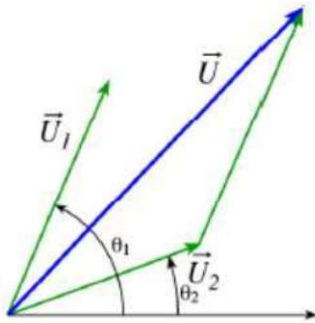


B. Soit le circuit suivant :



$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

Vue que les trois signaux ont la même période T,



De manière générale, la loi des mailles devient vectorielle : $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$. En aucun cas il ne faut faire la somme algébrique des valeurs efficaces de U_{eff1} et U_{eff2} ($U_{eff} \neq U_{eff1} + U_{eff2}$).

3.3. Déphasage entre la tension et le courant

Le déphasage entre la tension $u(t) = U_{Max} \sin(\omega t + \varphi_u)$ et le Courant $i(t) = I_{Max} \sin(\omega t + \varphi_i)$ est donné par :

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

Si $\varphi > 0$, le courant est en retard par rapport à la tension

Si $\varphi < 0$, le courant est en avance par rapport à la tension

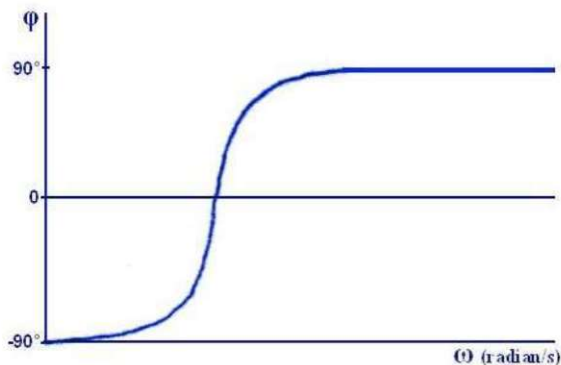
Si $\varphi = 0$, le courant et la tension sont en phase

Si $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, le courant et la tension sont en quadrature de phase

Si $\varphi = \pm \pi$, le courant et la tension sont en opposition de phase

- **Variation du déphasage**

Le déphasage φ s'annule quand $\omega = \omega_0$. Il croît de façon continue de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ quand ω varie de 0 à $l'∞$ (figure ci-dessous) :



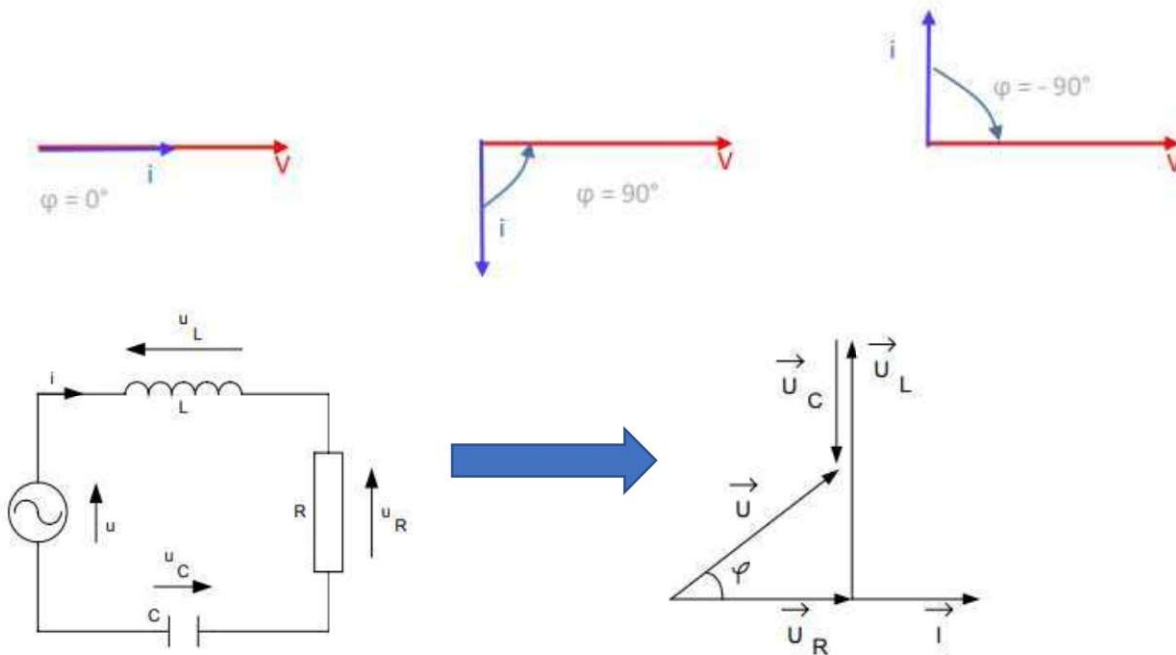
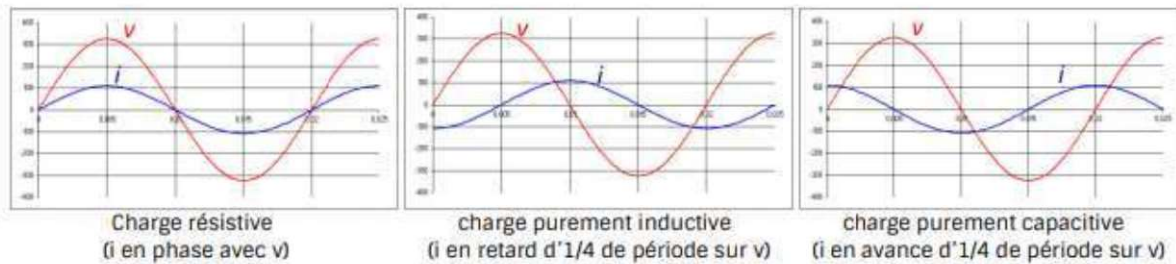
A la fréquence de résonance, l'amplitude du courant est maximale et le déphasage entre le courant et la tension est nul c'est à dire que le circuit se comporte comme une résistance pure.

Exemple

La figure suivante montre les formes d'ondes de la tension et du courant dans 3 cas idéaux de charges linéaires (c'est-à-dire qui n'introduisent pas de distorsions du courant) :

- charge purement résistive, la sinusoïde de courant $i(t)$ est « en phase » avec celle de tension $v(t)$;

- charges purement inductive ou capacitive, la sinusoïde de courant est déphasée d'un quart de période (angle de déphasage à 90°) en retard ou en avance par rapport à la tension.



3.4. La notation complexe.

3.4.1. Courant et tension complexe.

L'analogie entre le plan de Fresnel et le plan complexe conduit naturellement à représenter les vecteurs tournants associés aux grandeurs électriques sinusoïdales par des grandeurs complexes.

Un récepteur, soumis à une tension alternative sinusoïdale de la forme $u(t) = U_{Max} \sin(\omega t + \varphi_u)$ est parcouru par un courant $i(t)$ déphasé de φ par rapport à la tension : $i(t) = I_{Max} \sin(\omega t + \varphi_i)$



$i(t)$ et $u(t)$ étant des grandeurs sinusoïdales, elles peuvent être considérées comme les parties réelles des fonctions complexes suivantes :

$$\bar{u}(t) = U_{Max} \exp[j(\omega t + \varphi_u)] \quad \text{et} \quad \bar{i}(t) = I_{Max} \exp[j(\omega t + \varphi_i)]$$

ou

$$\bar{u}(t) = \bar{U}_{Max} \exp(j\omega t) \quad \text{et} \quad \bar{i}(t) = \bar{I}_{Max} \exp(j\omega t)$$

avec, \bar{U}_{Max} et \bar{I}_{Max} sont respectivement les amplitudes complexes de la tension et du courant :

$$\bar{U}_{Max} = U_{Max} \exp(j\varphi_u) \quad \text{et} \quad \bar{I}_{Max} = I_{Max} \exp(j\varphi_i)$$

On travaillera donc en notation complexe mais il sera facile de revenir au signal réel :

— Retour au signal réel complet grâce à la partie réelle du complexe : $u(t) = \text{Re}(\bar{u}(t))$ ou $i(t) = \text{Re}(\bar{i}(t))$

— Retour à l'amplitude du signal réel grâce au module de l'amplitude complexe ou du signal complexe : $I_{Max} = \|\bar{I}_{Max}\|$ ou $U_{Max} = \|\bar{U}_{Max}\|$

— Retour à la phase initiale grâce à l'argument de l'amplitude complexe : $\varphi = \arg(\bar{U}_{Max}) - \arg(\bar{I}_{Max})$

3.4.2. Impédance complexe

On définit l'impédance complexe d'un dipôle parcouru par le courant $i(t)$ et ayant aux bornes la tension $u(t)$ par le rapport Z entre la tension complexe aux bornes du dipôle et le courant complexe qui le traverse :

$$\bar{Z} = \frac{\bar{u}(t)}{\bar{i}(t)} = \frac{U_{Max} \exp[j(\omega t + \varphi_u)]}{I_{Max} \exp[j(\omega t + \varphi_i)]} = \frac{U_{Max}}{I_{Max}} \exp[j(\varphi_u - \varphi_i)] = Z \exp(j\varphi)$$

Avec $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

$$\bar{Z} = Z \exp(j\varphi) = Z \cos(\varphi) + jZ \sin(\varphi)$$

$R = Z \cos(\varphi)$ est appelée résistance et $X = Z \sin(\varphi)$ est appelée réactance.

$$X^2 + R^2 = Z^2 \text{ ce qui donne } Z = \sqrt{X^2 + R^2}$$

Le déphasage φ introduit par l'impédance est tel que $\text{tg}(\varphi) = \frac{X}{R}$ soit :

$$\varphi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

3.4.3. Admittance complexe

On a

$$\bar{Z} = R + jX$$

Par analogie avec la conductance $\frac{1}{R}$, on définit l'admittance complexe :

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - \frac{jX}{R^2 + X^2} = A + jB$$

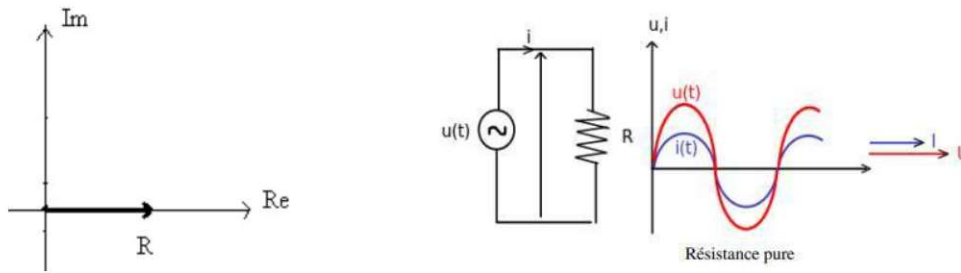
Avec $A = \frac{R}{R^2 + X^2}$: une conductance et $B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$: une susceptance

➤ Quelques impédances élémentaires

Résistance : La résistance est le seul cas où la loi d'Ohm est appliquée en valeur instantanée $u(t) = Ri(t)$. La résistance n'introduit pas un déphasage entre le courant et la tension. En effet,

$$\bar{u}(t) = Z_R \bar{i}(t) \Rightarrow Z_R = \frac{U_{Max}}{I_{Max}} = R \quad \text{Car } \varphi = 0.$$

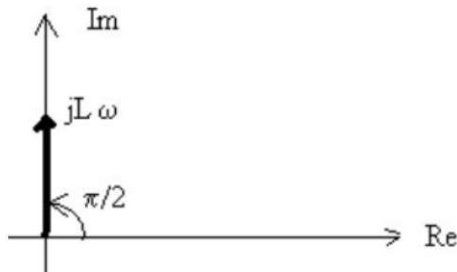
Sa représentation en diagramme de Fresnel est la suivante :



Inductance L: Pour L , on a la relation en valeur instantanées $u = L \frac{di}{dt}$ qui se traduit pour le régime sinusoïdal en valeur complexe par $\bar{u} = L \frac{d\bar{i}}{dt} = Lj\omega\bar{i} \Rightarrow \bar{u} = jL\omega\bar{i} = \bar{Z}_L\bar{i}$ d'où l'impédance complexe et le déphasage d'une inductance sont donnés par

$$\bar{Z}_L = jL\omega \text{ et } \varphi = +\frac{\pi}{2}$$

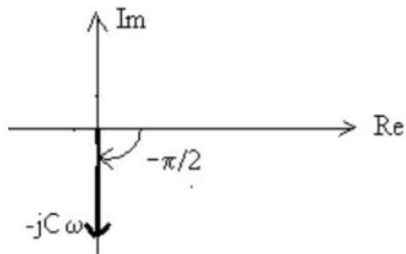
Elle est purement imaginaire, le diagramme de Fresnel est le suivant :



Condensateur C: Pour C on a la relation en valeur instantanées $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$ qui se traduit pour le régime sinusoïdal en valeur complexe par $\bar{u} = \frac{1}{C} \int \bar{i} dt = \frac{1}{C} \frac{1}{j\omega} \bar{i} \Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{jC\omega} \bar{i} = \bar{Z}_C\bar{i}$ d'où l'impédance complexe et le déphasage d'un condensateur sont donnés par

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

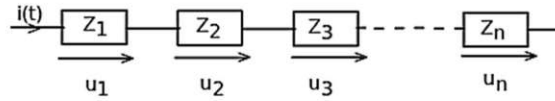
Elle est purement imaginaire, le diagramme de Fresnel est le suivant :



3.4.4. Association des impédances

Les lois, relatives aux associations des résistances en courants continus, restent valables en courants sinusoïdaux lorsqu'on utilise les impédances complexes.

- Association en série



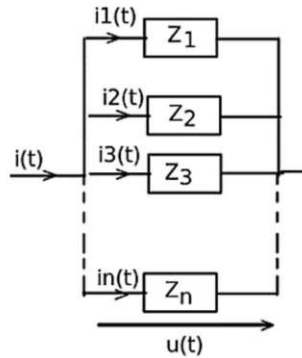
$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t) = \sum_{i=0}^n u_i(t)$$

$$\bar{u}(t) = \bar{u}_1(t) + \bar{u}_2(t) + \dots + \bar{u}_n(t) = \sum_{i=0}^n \bar{u}_i(t) = \left(\sum_{i=0}^n \bar{Z}_i(t) \right) \bar{i}$$

Donc

$$\bar{Z} = \sum_{i=0}^n \bar{Z}_i(t)$$

• Association en parallèle



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) = \sum_{i=0}^n i_i(t)$$

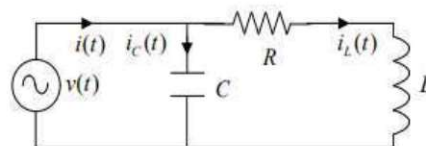
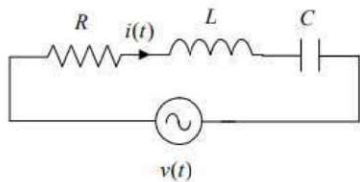
$$\frac{\bar{u}(t)}{\bar{Z}} = \frac{\bar{u}_1(t)}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{u}_2(t)}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{\bar{u}_n(t)}{\bar{Z}_n} = \sum_{i=0}^n \frac{\bar{u}_i(t)}{\bar{Z}_i} = \left(\sum_{i=0}^n \frac{1}{\bar{Z}_i} \right) \bar{u}$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{\bar{Z}_i}$$

Exemple

Considérons deux circuits RLC série/parallèle alimentés par une tension sinusoïdale $v(t)$:



Déterminer

1. L'impédance équivalente
2. La fréquence de résonance

3. Déphasage. Interpréter